ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی هر کدام از گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر n عددی فرد باشد، حاصل $n^{۲}-۵n+۹$ عددی زوج است. ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۳^{۱۷}$ بر ۸ برابر ۳ است. پ) برای ۳ مجموعهٔ A، B و C اگر $A\cup B=A\cup C$، آن‌گاه همواره $B=C$. ت) اگر $a\|b$ و $c\|b$، آن‌گاه $ac\|b$.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر $a\|b$ و $b^{۲}\|۳c$، آن‌گاه حاصل $[a,۶c]$ برابر .... است. ب) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷ برابر ۳ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳a$ بر ۷ برابر .... است. پ) مجموع هر دو عدد فرد متوالی همواره بر .... بخش‌پذیر است. (۴ یا ۶) ت) اگر $[a,b]=c$، آن‌گاه حاصل (b,c) برابر .... است.	۱
۳	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$.	۱
۴	اگر n عددی طبیعی و $n^{۳}$ فرد باشد، ثابت کنید n نیز فرد است.	۱/۵
۵	برای هر دو عدد حقیقی a و b درستی نامساوی زیر را ثابت کنید. $b^{۲}+۱\geq ۲a(b-a+۱)$	۱
۶	عدد طبیعی a را چنان بیابید که دو عبارت $a-۳$ و $۳a+۲$ نسبت به‌هم اول نباشند.	۱/۵
۷	اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $۵\|۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵\|۱۶k^{۲}+۲۸k+۶$	۱/۵
۸	اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\|a+۶$، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^{۲}+۲b^{۲}+۷$ بر ۸ را بیابید.	۲
۹	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.	۱/۵
۱۰	اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $c\overset{m}{\equiv}d$، آن‌گاه ثابت کنید $ac\overset{m}{\equiv}bd$.	۱/۵
۱۱	باقی‌ماندهٔ تقسیم $۵^{۱۲۰}+۳۰$ بر ۱۴ را بیابید.	۱/۵
۱۲	اگر در یک سال ۵ آبان سه‌شنبه باشد، در همان سال ۲۰ اسفند چه روزی از روزهای هفته است؟	۱
۱۳	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\overline{۵۳a۴۱۲}$ بر ۱۱ برابر ۹ می‌باشد، a را بیابید.	۲
۱۴	اگر $a\overset{۶}{\equiv}۲$ و $a\overset{۸}{\equiv}۴$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ a بر ۲۴ چقدر است؟	۲

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

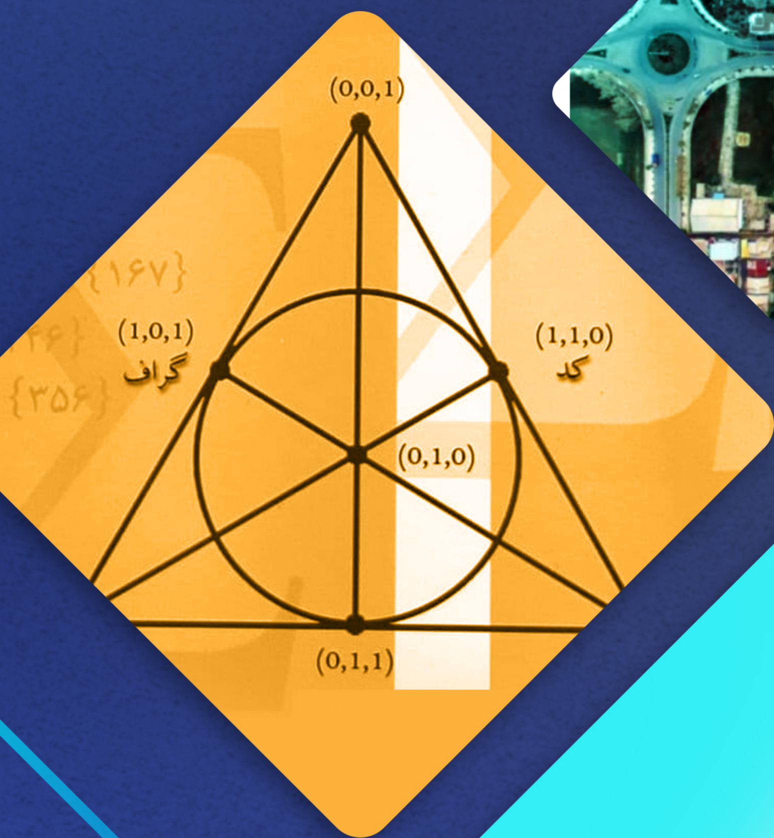
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

آذر ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

ریاضیات گسسته (رشته ریاضی و فیزیک)



۱۴۰۳_۱۴۰۴

-۱

الف) نادرست؛ چون n فرد است، داریم:

$$n=2k+1 \Rightarrow n^2-5n+9=(2k+1)^2-5(2k+1)+9=4k^2+4k+1-10k-5+9$$
$$=4k^2-6k+5=4k^2-6k+4+1=2(\underbrace{2k^2-3k+2}_{q})+1=2q+1$$

پس به‌ازای nهای فرد، حاصل n^2-5n+9 عددی فرد می‌شود.

ب) درست

$$3^2 \overset{8}{\equiv} 9 \overset{8}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{طرفین به‌توان ۸}} (3^2)^8 \overset{8}{\equiv} 1^8 \Rightarrow 3^{16} \overset{8}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{17} \overset{8}{\equiv} 3$$

پ) نادرست؛ مثال نقض زیر را ببینید:

$$A=\{1,2,3\}\ ,\ B=\{3,4,5\}\ ,\ C=\{4,5\}$$
$$A\cup B=A\cup C=\{1,2,3,4,5\}\ ,\ B\neq C$$

ت) نادرست؛ مثال نقض زیر را ببینید:

$$\begin{cases}3\mid 12\\ 6\mid 12\end{cases} \Rightarrow 3\times 6\nmid 12$$

-۲

الف) $|6c|$ یا $6|c|$

نکته: $a\mid b \Rightarrow a\mid b^n \quad (n\in N)$

نکته: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a\mid b \Rightarrow a\mid mb}$$

نکته: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$\boxed{a\mid b \wedge b\mid c \Rightarrow a\mid c}$$

نکته: $\forall a,b\in Z; a\mid b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$

طبق خواص عاد کردن داریم:

$$\begin{cases}a\mid b \Rightarrow a\mid b^2\\ b^2\mid 3c \Rightarrow b^2\mid 2\times 3c\end{cases} \Rightarrow a\mid 6c \Rightarrow [a,6c]=|6c|=6|c|$$

ب) ۲

راه‌حل اول:

نکته (قضیهٔ تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a=bq+r$ و $0\le r<b$.

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a=7q+3 \xrightarrow{\times 3} 3a=7(3q)+9=7(3q)+7+2=7\underbrace{(3q+1)}_{q'}+2=7q'+2$$

راه‌حل دوم:

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases}a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk\\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk\end{cases}$$

با استفاده از خواص همنهشتی داریم:

$$a \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 3} 3a \overset{7}{\equiv} 9 \overset{7}{\equiv} 9-7 \overset{7}{\equiv} 2$$

پ) ۴

دو عدد فرد متوالی را $۲k+۱$ و $۲k-۱$ در نظر گرفته و داریم:

$$۲k+۱+۲k-۱=۴k$$

ت) $|b|$

نکته: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d\,|\,a, d\,|\,b$

ب) $\forall m>۰;m\,|\,a, m\,|\,b \Rightarrow m\le d$

نکته: عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $a\,|\,c, b\,|\,c$

ب) $\forall m>۰, a\,|\,m, b\,|\,m \Rightarrow c\le m$

نکته: $\forall a,b\in Z; a\,|\,b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$

طبق نکات داریم:

$$[a,b]=c \Rightarrow b\,|\,c \Rightarrow (b,c)=|b|$$

۳-

نکته (اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها): گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به این روش اثبات، «اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها» می‌گویند.

اگر $a=۰$ باشد، حکم برقرار است. اگر $a\neq ۰$ باشد، آن‌گاه وارون عدد a وجود دارد که آن را با $a^{-۱}$ نشان می‌دهیم. با ضرب طرفین $a\cdot b=۰$ در $a^{-۱}$ داریم:

$$a^{-۱}\times(a\cdot b)=a^{-۱}\times ۰ \Rightarrow (a^{-۱}\times a)\cdot b=۰ \Rightarrow ۱\times b=۰ \Rightarrow b=۰$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

۴-

نکته (اثبات به روش برهان خلف): در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجهٔ متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی‌بودن همهٔ مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست‌بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

فرض: $n^۳$ فرد است

حکم: n فرد است

برهان خلف: فرض می‌کنیم n فرد نیست، پس n عددی زوج است و داریم:

$$n=۲k \Rightarrow n^۳=(۲k)^۳=۸k^۳=۲(\underbrace{۴k^۳}_{q})=۲q \Rightarrow n^۳=۲q$$

رابطهٔ بالا بدین معنی است که $n^۳$ زوج است و این خلاف فرض است، زیرا طبق فرض، $n^۳$ فرد است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۵-

نکته (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی نامساوی‌های ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آن‌گاه با بازگشت از مسیر طی‌شده به نامساوی اولیه می‌رسیم و از آنجایی که همهٔ عملیات مسیر رفت، بازگشت‌پذیرند به این نوع اثبات، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

طبق نکته داریم:

$$b^۲+۱\ge ۲a(b-a+۱) \Leftrightarrow b^۲+۱\ge ۲ab-۲a^۲+۲a \Leftrightarrow b^۲+۱-۲ab+۲a^۲-۲a\ge ۰ \Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲+a^۲-۲a+۱\ge ۰$$

$\Leftrightarrow (a-b)^۲+(a-۱)^۲\ge ۰$ بدیهی است.

-۶

نکته: عدد صحیح a، که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است- یا a، b را می‌شمارد (a، b را عاد می‌کند) یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است- هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$b = aq$$
$$a|b \Rightarrow b = aq$$

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند، می‌نویسیم:

$$a \nmid b$$

نکته: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>0; m|a, m|b \Rightarrow m \le d$

نکته: اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ یعنی ب.م.م a و b برابر یک باشد، در این صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

نکته: به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آن‌گاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} a|b \\ \\ a|c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|mb+nc$$

فرض کنیم ب.م.م $a-3$ و $3a+2$ عددی طبیعی مانند d است، داریم:

$$(a-3, 3a+2) = d$$

$$\left\{\begin{matrix} d|a-3 \\ \\ d|3a+2 \end{matrix}\right. \Rightarrow d|(3a+2)-3(a-3) \Rightarrow d|3a+2-3a+9 \Rightarrow d|11 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 11$$

چون $a-3$ و $3a+2$ نسبت به‌هم اول نیستند، پس $d=11$ قابل‌قبول است و داریم:

$$d|a-3 \xrightarrow{d=11} 11|a-3 \Rightarrow a-3=11k \Rightarrow a=11k+3$$

-۷

نکته: $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$ ،$(n\in N)$

نکته: $a|b \Rightarrow na|nb$

نکته: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c}$$

با استفاده از نکات داریم:

$$5|4k+1 \xrightarrow{\text{طرفین به‌توان ۲}} 5^2|(4k+1)^2 \Rightarrow 25|16k^2+8k+1 \qquad (1)$$

$$5|4k+1 \xrightarrow{\times 5} 5\times 5|5(4k+1) \Rightarrow 25|20k+5 \qquad (2)$$

با جمع سمت راست طرفین روابط (۱) و (۲) داریم:

$$25|(16k^2+8k+1)+(20k+5) \Rightarrow 25|16k^2+28k+6$$

-۸

نکته (قضیهٔ تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a=bq+r$ و $0\le r<b$.

نکته: مربع هر عدد فرد به‌صورت $8k+1$ است، یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است. $\text{فرد } a \Rightarrow a^2 = 8k+1$

a عددی فرد است و ۶ زوج است، پس $a+6$ عددی فرد است، از طرفی $b|a+6$، و می‌دانیم فقط یک عدد فرد می‌تواند عددی فرد را عاد کند، پس b نیز فرد است. حال طبق نکات داریم:

$$\text{فرد است } a \Rightarrow a^2 = 8q+1 \ , \quad \text{فرد است } b \Rightarrow b^2 = 8t+1$$

$$a^2+2b^2+7 = 8q+1+2(8t+1)+7 = 8q+16t+10 = 8q+16t+8+2 = 8\underbrace{(q+2t+1)}_{q'}+2 = 8q'+2$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ این عدد بر ۸ برابر ۲ است.

۹-

نکته: هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $۳k$، $۳k+۱$ و $۳k+۲$ نوشته می‌شود.

طبق نکته برای عدد a سه حالت داریم:

۱) $a=۳k \Rightarrow$ در این حالت خود a مضرب ۳ است.

۲) $a=۳k+۱ \Rightarrow a+۲=۳k+۱+۲=۳k+۳=۳\underbrace{(k+۱)}_{q}=۳q$

در این حالت $a+۲$ مضرب ۳ است.

۳) $a=۳k+۲ \Rightarrow a+۴=۳k+۲+۴=۳k+۶=۳\underbrace{(k+۲)}_{q'}=۳q'$

در این حالت نیز $a+۴$ مضرب ۳ است.

پس همواره یکی از سه عدد داده‌شده بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۰-

نکته: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m\,|\,a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a,b\in \mathbb{Z},a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m\,|\,a-b\ (m\in \mathbb{N})$$

نکته: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,mb}$$

نکته: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a\,|\,b\wedge a\,|\,c \Rightarrow a\,|\,b\pm c}$$

طبق نکات داریم:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m\,|\,a-b \xrightarrow{\times c} m\,|\,c(a-b) \Rightarrow m\,|\,ac-bc \qquad (۱)$$

$$c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m\,|\,c-d \xrightarrow{\times b} m\,|\,b(c-d) \Rightarrow m\,|\,bc-bd \qquad (۲)$$

طبق نکتهٔ دوم با جمع سمت راست روابط (۱) و (۲) داریم:

$$m\,|\,ac-bc+bc-bd \Rightarrow m\,|\,ac-bd \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$$

۱۱-

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n\in \mathbb{N})$

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a+mt\overset{m}{\equiv}b+mk \\ a-mt\overset{m}{\equiv}b-mk \end{cases}$$

نکته: به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a+c\overset{m}{\equiv}b+c \\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c \end{cases}$$

با استفاده از نکات داریم:

$$۵\overset{۱۴}{\equiv}۵ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۵^۲\overset{۱۴}{\equiv}۲۵ \Rightarrow ۵^۲\overset{۱۴}{\equiv}۲۵-۲\times۱۴\overset{۱۴}{\equiv}-۳ \Rightarrow ۵^۲\overset{۱۴}{\equiv}-۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۳\overset{۱۴}{\equiv}-۱۵ \Rightarrow ۵^۳\overset{۱۴}{\equiv}-۱۵+۱۴\overset{۱۴}{\equiv}-۱$$

$$\Rightarrow ۵^۳\overset{۱۴}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\text{طرفین به‌توان ۴۰}} (۵^۳)^{۴۰}\overset{۱۴}{\equiv}(-۱)^{۴۰} \Rightarrow ۵^{۱۲۰}\overset{۱۴}{\equiv}۱ \Rightarrow ۵^{۱۲۰}+۳۰\overset{۱۴}{\equiv}۱+۳۰\overset{۱۴}{\equiv}۳۱-۲\times۱۴\overset{۱۴}{\equiv}۳$$

بنابراین باقی‌مانده برابر ۳ است.

-۱۲

نکته (مسائل تقویمی): اگر یک روز از تقویم در یک سال معلوم باشد و بخواهیم چندشنبه بودن روز دیگری که از نظر تاریخ، بعد از روز داده‌شده قرار گرفته (آینده) مشخص کنیم. باید اختلاف روزها را به دست آوریم و سپس اختلاف را در پیمانهٔ ۷ کوچک کنیم، یعنی باقی‌ماندهٔ آن را بر ۷ بیابیم و در انتها به‌اندازهٔ باقی‌مانده با شروع از روز معلوم پیش می‌رویم تا به جواب برسیم.

طبق نکته فاصلهٔ تعداد روزهای ۵ آبان تا ۲۰ اسفند را می‌یابیم:

$$\text{تعداد روزها} = \underset{\text{آبان}}{۲۵} + \underset{\text{آذر، دی، بهمن}}{۳\times۳۰} + \underset{\text{اسفند}}{۲۰} = ۱۳۵$$

اکنون باقی‌ماندهٔ این عدد بر ۷ را می‌یابیم:

$$۱۳۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۳۵-۱۹\times۷ \overset{۷}{\equiv} ۱۳۵-۱۳۳ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

باید از سه‌شنبه ۲ روز جلوتر برویم که می‌شود پنجشنبه.

-۱۳

نکته: برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن عدد را از سمت راست یکی‌درمیان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ عدد به‌دست‌آمده را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم.

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۱}{\equiv} a_۰ - a_۱ + a_۲ - \cdots + (-۱)^n a_n$$

طبق نکته داریم:

$$\overline{۵۳a۴۱۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۲-۱+۴-a+۳-۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow -a+۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} -۶ \Rightarrow a = ۱۱k-۶$$

با توجه به اینکه a یک رقم می‌باشد، داریم:

$$k=۱ \Rightarrow a = ۱۱-۶=۵ \Rightarrow a=۵$$

-۱۴

نکته: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m \mid a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a,b \in Z, a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \ (m \in N)$$

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

نکته: به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آن‌گاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid mb+nc$$

راه‌حل اول:

$$a \overset{۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} ۲-۶ \overset{۶}{\equiv} -۴ \Rightarrow a = ۶k-۴ \qquad (۱)$$

$$a \overset{۸}{\equiv} ۴ \Rightarrow a \overset{۸}{\equiv} ۴-۸ \overset{۸}{\equiv} -۴ \qquad (۲)$$

با جای‌گذاری (۱) در (۲) داریم:

$$۶k-۴ \overset{۸}{\equiv} -۴ \Rightarrow ۶k \overset{۸}{\equiv} ۰ \xrightarrow[(۶,۸)=۲]{\div ۶} k \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow k = ۴t$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (۱)}} a = ۲۴t-۴ \Rightarrow a \overset{۲۴}{\equiv} -۴ \Rightarrow a \overset{۲۴}{\equiv} -۴+۲۴ \overset{۲۴}{\equiv} ۲۰$$

راه‌حل دوم:

$$a \overset{۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow a=۶k+۲ \xrightarrow{\times ۴} ۴a=۲۴k+۸ \qquad (۱)$$

$$a \overset{۸}{\equiv} ۴ \Rightarrow a=۸k'+۴ \xrightarrow{\times ۳} ۳a=۲۴k'+۱۲ \qquad (۲)$$

اکنون با تفاضل طرفین روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۴a-۳a=(۲۴k+۸)-(۲۴k'+۱۲) \Rightarrow a=۲۴(k-k')-۴ \Rightarrow a=۲۴(k-k')-۲۴+۲۴-۴ \Rightarrow a=۲۴(\underbrace{k-k'-۱}_{q})+۲۰$$

$$\Rightarrow a=۲۴q+۲۰$$

راه‌حل سوم:

$$a \overset{۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۶|a-۲ \xrightarrow{\times ۴} ۲۴|۴a-۸ \qquad (۱)$$

$$a \overset{۸}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۸|a-۴ \xrightarrow{\times ۳} ۲۴|۳a-۱۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{-} ۲۴|(۴a-۸)-(۳a-۱۲) \Rightarrow ۲۴|a+۴ \Rightarrow a+۴ \overset{۲۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۲۴}{\equiv} -۴ \Rightarrow a \overset{۲۴}{\equiv} -۴+۲۴ \overset{۲۴}{\equiv} ۲۰ \Rightarrow a \overset{۲۴}{\equiv} ۲۰$$